Problème 13

Arno De Sousa-Kornhauser

17 décembre 2025

On prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante :

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et de coefficient dominant $\alpha \neq 0$, il existe $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tel que

$$|P(k)| \geq |\alpha| \frac{n!}{2^n}.$$

Initialisation $(n = 0)$. Si $\deg P = 0$, alors $P(x) = \alpha$ et, pour $k = 0$,

$$|P(0)| = |\alpha| = |\alpha| \frac{0!}{2^0}.$$

Hérédité On suppose la propriété vraie au rang $n - 1$ pour un $n \in \mathbb{N}$

On considère $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et de coefficient dominant $\alpha \neq 0$. On pose

$$(\Delta P)(x) = P(x+1) - P(x).$$

Alors ΔP est de degré $n - 1$ et son coefficient dominant vaut $n\alpha$ car :

$$\begin{aligned}
\alpha\big((x+1)^n - x^n\big) &= \alpha \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j - x^n \right) \\
&= \alpha \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} x^j \\
&= n\alpha\, x^{n-1} + \alpha \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j} x^j.
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence appliquée à ΔP, il existe $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que

$$|\Delta P(m)| \geq |n\alpha| \frac{(n-1)!}{2^{\,n-1}} = |\alpha| \frac{n!}{2^{\,n-1}}.$$

En utilisant l'inégalité $\max(|a|, |b|) \geq \frac{|a-b|}{2}$ avec $a = P(m+1)$ et $b = P(m)$, on obtient

$$\max\big(|P(m)|, |P(m+1)|\big) \geq \frac{|P(m+1) - P(m)|}{2} = \frac{|\Delta P(m)|}{2} \geq |\alpha| \frac{n!}{2^{\,n}}.$$

Ainsi, il existe $k \in \{m, m+1\} \subset \{0, 1, \ldots, n\}$ tel que

$$|P(k)| \geq |\alpha| \frac{n!}{2^n}.$$

La propriété est donc vraie au rang n.